Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 1

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\alpha x^3$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^* \exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\varepsilon x^2\dot{x}^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\beta x\dot{x}^2$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке A, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $2d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = m\alpha x^4$ действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1 \sin\gamma_1 t + F_2 \sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon x^2(x + a) = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $2\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi \cdot \Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi \cdot \Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x\dot{x}^4$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 2

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\alpha x\dot{x}^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^*\exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\varepsilon x^4/4$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\beta x^2\dot{x}^2$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке A, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $3d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = -m\beta x\dot{x}^2$ действует внешняя сила $F(t) = F_0\sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1\sin\gamma_1 t + F_2\sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon x^3(1 + a/x) = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $3\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x,\dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi\cdot\Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi\cdot\Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x\dot{x}^6$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 3

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\alpha x^5$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^*\exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\beta x^2\dot{x}^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\varepsilon\dot{x}^4$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке А, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $3d/2$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = -m\beta x^2\dot{x}^2$ действует внешняя сила $F(t) = F_0\sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1\sin\gamma_1 t + F_2\sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon x(x^2 + ax + b) = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $4\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi\cdot\Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi\cdot\Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = (x^2 + x^3)\dot{x}^8$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 4

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\alpha x^3\dot{x}^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^*\exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\beta x^4/4$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\varepsilon x^2\dot{x}^2$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке А, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $4d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = m\varepsilon\dot{x}^4$ действует внешняя сила $F(t) = F_0\sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1\sin\gamma_1 t + F_2\sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon x^2(x - a) = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $5\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi\cdot\Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi\cdot\Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x^3\dot{x}^6$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 5

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\alpha x\dot{x}^4$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^*\exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\epsilon\dot{x}^4$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\beta x^3$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке A, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $5d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = m\varepsilon x^2\dot{x}^2$ действует внешняя сила $F(t) = F_0\sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1\sin\gamma_1 t + F_2\sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon x^3(a/x + 1) = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $6\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi\cdot\Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi\cdot\Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x^3\dot{x}^4$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 6

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\varepsilon x^5$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^* \exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\gamma x^2(x^2 + \dot{x}^2)$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\epsilon x\dot{x}^2$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке А, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $6d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = m\beta x^3$ действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1 \sin\gamma_1 t + F_2 \sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon(x^2 + ax^3) = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $5\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi \cdot \Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi \cdot \Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x^3\dot{x}^2$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 7

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\varepsilon x^3 \dot{x}^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^* \exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\alpha x^4/4$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\gamma \dot{x}^4$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке A, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $4d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = m\epsilon x \dot{x}^2$ действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1 \sin\gamma_1 t + F_2 \sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon x^2(ax + 1) = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $4\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi \cdot \Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi \cdot \Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x^5\dot{x}^2$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 8

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\varepsilon x\dot{x}^4$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^* \exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\beta x^2\dot{x}^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\alpha x^4$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке A, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $8d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = m\gamma\dot{x}^4$ действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1 \sin\gamma_1 t + F_2 \sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon(x^3 - ax^2) = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $3\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi \cdot \Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi \cdot \Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x^5\dot{x}^6$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 9

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\varepsilon x^3$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^* \exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\gamma\dot{x}^2(x^2+\dot{x}^2)$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\alpha\dot{x}^4$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке А, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $4d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = m\alpha x^4$ действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1\sin\gamma_1 t + F_2 \sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon x^2(a + bx) = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $2\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi\cdot\Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi\cdot\Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x\dot{x}^{10}$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 10

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\beta x^5/5$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^* \exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\alpha\dot{x}^2 x^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\epsilon x^3/3$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке A, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $5d/2$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = m\alpha\dot{x}^4$ действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1 \sin\gamma_1 t + F_2 \sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon x^2(x - x_0) = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $3\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi \cdot \Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi \cdot \Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x\dot{x}^4$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 11

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\beta x^3/3$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^* \exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\alpha x^2(x^2 + 2\dot{x}^2)$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\varepsilon\dot{x}^4$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке A, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $4d/3$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = m\epsilon x^3/3$ действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1 \sin\gamma_1 t + F_2 \sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon x^3(1 - x_0/x) = 0, \quad h \ll 1, \ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $4\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi \cdot \Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi \cdot \Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x^7\dot{x}^2$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 12

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\beta x^3\dot{x}^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^*\exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\varepsilon x^4$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\alpha x^3$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке A, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $3d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = m\varepsilon\dot{x}^4$ действует внешняя сила $F(t) = F_0\sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1\sin\gamma_1 t + F_2\sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon x^2(x + b) = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $5\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi\cdot\Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi\cdot\Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x^9\dot{x}^2$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 13

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\epsilon x\dot{x}^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^*\exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\epsilon x^2\dot{x}^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\alpha x^4/4$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке А, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $6d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = m\alpha x^3$ действует внешняя сила $F(t) = F_0\sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1\sin\gamma_1 t + F_2\sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon x^3(a + b/x) = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $6\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi\cdot\Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi\cdot\Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x\dot{x}^{12}$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 14

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\epsilon x^3$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^*\exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\alpha x^2(x^2 + \dot{x}^2)$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\beta\dot{x}^4$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке А, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $2d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = -m\alpha x^4/4$ действует внешняя сила $F(t) = F_0\sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1\sin\gamma_1 t + F_2\sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon x^2(x + a) = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $7\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi\cdot\Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi\cdot\Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x^3\dot{x}^8$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 15

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\epsilon x\dot{x}^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^* \exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\alpha\dot{x}^4$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\gamma x^2\dot{x}^2$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке A, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $7d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = -m\beta\dot{x}^4$ действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1 \sin\gamma_1 t + F_2 \sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon x^2(a - x) = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $8\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi \cdot \Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi \cdot \Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x^5\dot{x}^6$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 16

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\beta x\dot{x}^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^* \exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\alpha x^2\dot{x}^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\varepsilon\dot{x}^4$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке A, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $4d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = m\gamma x^2\dot{x}^2$ действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1 \sin\gamma_1 t + F_2 \sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon(x + a)x^2 = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $6\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi \cdot \Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi \cdot \Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x^3\dot{x}^6$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 17

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\beta x^5$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^*\exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\gamma\dot{x}^2x^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\epsilon x\dot{x}^2$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке A, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $3d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = m\varepsilon\dot{x}^4$ действует внешняя сила $F(t) = F_0\sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1\sin\gamma_1 t + F_2\sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon x^3(1/x + \alpha) = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $7\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi\cdot\Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi\cdot\Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x\dot{x}^6$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 18

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\varepsilon x\dot{x}^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^*\exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\alpha x^2\dot{x}^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\gamma x^4$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке A, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $5d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = m\epsilon x\dot{x}^2$ действует внешняя сила $F(t) = F_0\sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1\sin\gamma_1 t + F_2\sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon x^2 - ax^3) = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $5\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x,\dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi\cdot\Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi\cdot\Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x^3\dot{x}^4$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 19

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\varepsilon x^5/5$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^* \exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\alpha x^2\dot{x}^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\beta\dot{x}^4$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке А, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $3d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = m\gamma x^4$ действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1 \sin\gamma_1 t + F_2 \sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon x^3 - ax^2 = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $4\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi \cdot \Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi \cdot \Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x^7\dot{x}^2$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 20

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\varepsilon x^3$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^* \exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\alpha\dot{x}^2(x^2 + \dot{x}^2)$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\beta x\dot{x}^2$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке A, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $2d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = m\beta\dot{x}^4$ действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1 \sin\gamma_1 t + F_2 \sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon x^2 - \alpha x^3) = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $3\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi \cdot \Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi \cdot \Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x^7\dot{x}^4$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 21

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\gamma x^3/3$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^*\exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\alpha x^2(\dot{x}^2 + 2x^2)$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\varepsilon\dot{x}^4$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке А, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $3d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = m\beta x\dot{x}^2$ действует внешняя сила $F(t) = F_0\sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1\sin\gamma_1 t + F_2\sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon x^2 - ax^3 = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $2\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi\cdot\Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi\cdot\Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x\dot{x}^8$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 22

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\gamma x\dot{x}^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^*\exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\alpha\dot{x}^4$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\beta x^2\dot{x}^2$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке А, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $7d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = m\varepsilon\dot{x}^4$ действует внешняя сила $F(t) = F_0\sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1\sin\gamma_1 t + F_2\sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon(x+\alpha)x^2 = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $3\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi\cdot\Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi\cdot\Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x^5\dot{x}^2$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 23

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\gamma x^3/3$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^* \exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\alpha x^2\dot{x}^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\varepsilon\dot{x}^4$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке A, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $3d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = m\beta x^2\dot{x}^2$ действует внешняя сила $F(t) = F_0\sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1\sin\gamma_1 t + F_2\sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon x^2 + ax^3 = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $4\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi \cdot \Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi \cdot \Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x^3\dot{x}^2$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 24

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\gamma x^5$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^* \exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\alpha x^2 \dot{x}^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\varepsilon x \dot{x}^2$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке А, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $4d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = -m\varepsilon \dot{x}^4$ действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1 \sin\gamma_1 t + F_2 \sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon(x + x_0)x^2 = 0, \quad h \ll 1, \ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $5\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi \cdot \Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi \cdot \Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x\dot{x}^4$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?

Домашнее задание №19

Нелинейные колебания

Вариант 25

1. Найдите первую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = -m\gamma x^3$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\exp(\imath\omega_0 t) + A^*\exp(-\imath\omega_0 t)$. Изобразите фазовый портрет и укажите на нем, какие решения найдены в этой задаче.

2. Найдите первую поправку к частоте колебаний осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\varepsilon x^2\dot{x}^2$. Решение в нулевом приближении возьмите в виде $x_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

3. Получите вторую поправку к колебаниям осциллятора массы m с собственной частотой ω_0, вызванную малой ангармонической поправкой к функции Лагранжа $\delta L = m\alpha x^4$.

4. Бусинка массой m может скользить вдоль горизонтальной спицы. Она прикреплена к точке A, находящейся на расстоянии d от спицы, пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $5d$. Найдите колебания системы в главном приближении, а также поправку к нему. Найдите поправку к частоте колебаний.

5. Рассмотрим теперь влияние нелинейности на вынужденные колебания. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 и нелинейной поправкой $\delta L = m\varepsilon x\dot{x}^2$ действует внешняя сила $F(t) = F_0\sin\omega_f t$. Найдите вынужденные колебания системы в нулевом и первом приближениях. На каких частотах колеблется система?

6. Двухчастотное внешнее воздействие приводит к новому нелинейному эффекту – генерации композиционных гармоник. Пусть внешняя сила, действующая на осциллятор, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет вид $F(t) = F_1\sin\gamma_1 t + F_2\sin\gamma_2 t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора в нулевом и первом приближениях.

7. Нелинейность приводит к необычным эффектам не только в задачах о колебаниях. Рассмотрим частицу массы m, налетающую с энергией E на потенциальный горб $U(x) = -kx^2/2$. Нелинейность в системе имеет такой же вид, что и в задаче 5. Изобразите фазовый портрет, опишите качественно движение частицы в зависимости от значений параметров системы. Найдите зависимость ее координаты от времени. Будет ли движение инфинитным?

8. Рассмотрим слабо нелинейный осциллятор, испытывающий низкочастотное параметрическое воздействие. Его уравнение движение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x + \varepsilon(x - a)x^2 = 0, \quad h \ll 1,\ \omega \ll \omega_0.$$

Найдите колебания осциллятора в двух приближениях. Какую роль играет нелинейность (рассмотрите различные соотношения параметров задачи)?

9. Исследуем нелинейность в системе, состоящей из нескольких осцилляторов. Пусть два осциллятора одинаковой массы m с собственными частотами ω_0 и $6\omega_0$ связаны слабой нелинейной поправкой $\delta U = \varepsilon x_1 x_2^2$. В начальный момент времени первый осциллятор совершает колебания с амплитудой A, а второй покоится. Найдите закон изменения амплитуд колебаний осцилляторов.

10. Для учета влияния различных малых поправок в уравнении колебаний на частоту и амплитуду существует такой наглядный метод. Будем искать решение уравнения вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Phi(x, \dot{x})$ с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в форме $x = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$ с достаточно медленно меняющимися во времени амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$, причем потребуем, чтобы $\dot{x} = \omega_0 a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Последнее условие совместно с уравнением движения осциллятора дает пару дифференциальных уравнений первого порядка на функции $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$. Проверьте, что эта система сводится к такому виду:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon\cos\Psi\cdot\Phi/\omega_0, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon\sin\Psi\cdot\Phi/a\omega_0, \end{cases}$$

где введена полная фаза $\Psi = \omega_0 t + \varphi$. В первом приближении можно усреднить правые части этих соотношений по периоду колебаний (т.е. по Ψ) и тем самым найти поправки к амплитуде и частоте. Кроме того, эта пара уравнений задает фазовую кривую в полярных координатах.

Пользуясь этим методом, найдите поправку к колебаниям осциллятора, вызванную нелинейностью вида $\Phi = x\dot{x}^6$. Изобразите схематически фазовый портрет системы. Работает ли этот метод для нахождения поправки к частоте для $\Phi = x^4$? О чем это говорит?